CONCOURS 1996

Option : Spéciales C

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures - Coefficient : 4

Le soin apporté à la rédaction et au raisonnement sera un élément important d'appréciation.

Première partie

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme défini par :

$$E_0(X) = 1, \text{ et pour } n \geq 1 : E_n(X) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X+k) = \frac{X(X+1)...(X+n-1)}{n!}$$

1°) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que $(E_0, ..., E_p)$ est une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_p[X]$ constitué des polynômes réels de degré $\leq p$.

2°) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définie par : $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} Q(n)\,x^n$.

3°) Soit $p \in \mathbb{N}$.

a) Soit G définie sur] - 1,1[par :

$$\forall x \in]-1,1[,\ G(x) = \frac{1}{1-x}$$

Montrer que G est développable en série entière sur] - 1,1[et expliciter le développement en série entière de la dérivée p-ième de G : $G^{(p)}$.

b) Calculer $f_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} E_p(k)\,x^k$ pour $x \in]-1,1[$.

4°) Soit $p \in \mathbb{N}$.

a) Soit $Q \in \mathbb{R}_p[X]$. Montrer l'existence d'un unique $R \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} Q(n)\,x^n = \frac{R(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

b) Expliciter R, lorsque $p = 3$, et $Q(X) = X^3$.

c) On suppose que Q est de degré p : $Q(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ avec $a_p \neq 0$.

Soit g la série entière définie par : $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} Q(n)\,x^n$. Déterminer un équivalent simple de g(x) quand x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures (en fonction de x, p et a_p).

5°) Soit $p \in \mathbb{N}$. A tout $Q \in \mathbb{R}_p[X]$, on peut donc lui associer l'unique $R \in \mathbb{R}_p[X]$, tel que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} Q(n)\,x^n = \frac{R(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

(i) Montrer que l'application Φ_p qui à Q associe R est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_p[X]$, et étudier si elle est bijective.

(ii) On suppose que p = 2. Ecrire la matrice de Φ_2 relativement à la base (E_0, E_1, E_2). Déterminer les valeurs propres de Φ_2, et étudier si Φ_2 est diagonalisable.

Deuxième partie

1°) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $E_{n+1}(\alpha+1) = E_{n+1}(\alpha) + E_n(\alpha+1)$.

2°) (i) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} E_n(\alpha)\,x^n$ pour $x \in]-1,1[$.

(ii) En déduire que pour tous réels α et β, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$E_n(\alpha+\beta) = \sum_{k=0}^{n} E_k(\alpha)\,E_{n-k}(\beta)$$

3°) Pour a, b et c dans $\mathbb{R}_+^*$, on considère la série entière H définie par :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n(a)\,E_n(b)}{E_n(c)}\,z^n$$

(i) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

(ii) Montrer que H est solution sur l'intervalle]-1,1[de l'équation différentielle :

$$x(1-x)\,y'' + \{c-(a+b+1)\,x\}\,y' - ab\,y = 0.$$

Troisième partie

1°) (i) Montrer l'existence pour $x > 0$ de $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$, et montrer que $\Gamma(x) > 0$.

(ii) Justifier la relation, pour $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

2°) (i) Montrer l'existence pour x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ de: $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$.

(ii) Montrer que $\beta(x,y) > 0$, et comparer $\beta(x,y)$ avec $\beta(y,x)$.

(iii) Etablir une relation entre $\beta(x+1,y)$ et $\beta(x,y+1)$, puis entre $\beta(x+1,y)$ et $\beta(x,y)$.

(iv) Montrer que pour tout $x > 0$, et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\beta(n,x) = \frac{1}{n.E_n(x)} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(x)}{\Gamma(n+x)}.$$

3°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Montrer que pour tout $t \in [0,n]$, on a : $(1-\frac{t}{n})^n \le e^{-t}$.

(ii) Montrer que pour tout $t \in [0,n]$, on a : $(1-\frac{t^2}{n})e^{-t} \le (1-\frac{t}{n})^n$. On étudiera les deux cas : $t \in [0,\sqrt{n}]$, et $t \in [\sqrt{n},n]$.

4°) Soit $x > 0$.

(i) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, utiliser 3° pour obtenir un encadrement de : $\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n . t^{x-1} . dt$.

(ii) Conclure que : $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n . t^{x-1} . dt = \lim_{n\to+\infty} (n^x \beta(n+1,x))$.

(iii) En déduire, grâce à 2° (iv), que : $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} (\frac{n^x . n!}{x.(x+1)....(x+n)})$.

5°) (i) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Donner un équivalent de $E_n(\alpha)$ quand n tend vers $+\infty$, dépendant de $\Gamma(\alpha)$.

(ii) Adapter le résultat précédent au cas où $\alpha \in \mathbb{R}$: pour cela on utilisera $p \in \mathbb{N}$ tel que $p + \alpha > 0$.

(iii) En admettant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, donner un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de C_{2n}^n.

Quatrième partie

1°) Soit a > 0. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilité $(\Omega, \tau, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$, et admettant comme densité l'application g définie par :

$$g(t)=\frac{e^{-t}\,t^{a-1}}{\Gamma(a)} \text{ pour } t>0;\ g(t)=0 \text{ si } t\le 0.$$

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X^n admet une espérance que l'on calculera.

2°) Soient u > 0, et v > 0. Soit Y une variable aléatoire définie sur l'espace probabilité $(\Omega, \tau, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $]0,+1[$, et admettant comme densité l'application h définie par :

$$h(t)=\frac{t^{u-1}(1-t)^{v-1}}{\beta(u,v)} \text{ pour } t\in\,]0,1[\,;\ h(t)=0 \text{ si } t\le 0 \text{ ou si } t\ge 1.$$

(i) Montrer que Y admet une espérance et une variance que l'on calculera.

(ii) Pour tout réel y, on note [y] la partie entière de y, c'est-à-dire l'unique entier p tel que : $p\le y<p+1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire par : $A_n=\frac{[2^n Y]}{2^n}$; c'est-à-dire que pour tout $\omega\in\Omega : A_n(\omega)=\frac{[2^n Y(\omega)]}{2^n}$.

Pour tout réel s, déterminer : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n\le s)$.

3°) Soit a > 0, et $n\in\mathbb{N}^*$. Soit Y_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \tau, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$, et admettant comme densité h_n définie par :

$$h_n(t)=\frac{t^{a-1}(1-t)^{n-1}}{\beta(a,n)} \text{ pour } t\in\,]0,1[\,;\ h_n(t)=0 \text{ si } t\le 0 \text{ ou si } t\ge 1.$$

Soit $Z_n = n\,Y_n$.

(i) Déterminer la loi de Z_n.

(ii) Montrer que pour tout réel s, on a : $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(Z_n\le s)=\mathbf{P}(X\le s)$ où X est la variable définie en 1°. Pour cela on utilisera avec soin les inégalités vues en III.3°.